



TITLE:

Torsion-freeness of higher direct images of canonical bundles

AUTHOR(S):

森脇, 淳

CITATION:

森脇, 淳. Torsion-freeness of higher direct images of canonical bundles. 代数幾何学シンポジウム記録 1985, 1985: 184-204

ISSUE DATE:

1985

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/212646>

RIGHT:

Torsion freeness of higher direct images of canonical bundles

京大、理. 森脇 淳

§0. 序.

X を非特異射影多様体, Y を射影多様体,
 $f: X \rightarrow Y$ を全射の射とする。この時, J. Kollár
[Ko 1] は, すべての $i \geq 0$ について $R^i f_* \omega_X$ が,
torsion free であることを示した。この事実を, Y が
local analytic な場合に拡張しようというのが, 本稿
の目的である。つまり 目的とする定理は次の
とおりである。

定理 1 X を複素多様体, Y を被約で既約
な複素空間, $f: X \rightarrow Y$ を射影的射とする。
ここで X のすべての連結成分は, f によって Y 上に
全射的に移ると仮定する。このとき $R^i f_* \omega_X$ は, すべての
 $i \geq 0$ について torsion free である。

定理1に於いて, f が射影的であることは, 本稿の証明においては, 本質的である。しかし, 筆者は, f がケーラー的である時も成立するであろうと考えている。もちろん, f がさらに一般的な場合は, 定理1は成立しない。実際, 中村 [Nm] や 上野 [U] は, スムーズな変形 $\pi: X \rightarrow \Delta$ で次を満たすものが構成されている。任意の $t \in \Delta^*$ について $P_g(\pi^{-1}(0)) > P_g(\pi^{-1}(t))$ 。ここで $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$, $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ である。定理1は, 消滅定理及びホッジ理論と深く関係しており, まず消滅定理より解説していきたいと思う。尚, 詳細は, [Mw]にある。

§1. 消滅定理

大沢 [O] の L^2 -method によりまず次の定理が示される。

定理2 X を連結な複素多様体, Y と Z を被約で既約な複素空間とする。 $f: X \rightarrow Y$ を全射の射影的射とし, $g: Y \rightarrow Z$ を固有な生成的に有限射とする。さらに (E, h) をエルミートベクトル束でその曲率形式が半正定値であるとする。

この時, $R^i f_*(\omega_X \otimes E) = 0$ が任意の $i > 0$ について成立する。

定理 2 を もう少し拡張 するために 次の定理を引用する。

定理 3 (中山 [Ny2]) X を連結な複素多様体, Y を被約で既約な複素空間, $f: X \rightarrow Y$ を 全射で射影的な射とする。 X 上の \mathbb{Q} -因子 A が次を満たすとする。

(1) $f(C)$ が点となる 任意の X 上のコンパクトな曲線 C について $(A \cdot C) \geq 0$,

(2) 任意の一般ファイバー X_y について, $\kappa(X_y, A_y) = \dim X_y$,

(3) A の小数部分は 正則交叉の台をもつ。

このとき すべて $i > 0$ について $R^i f_*(\omega_X(\lceil A \rceil)) = 0$ が成立する。 ここで $\lceil A \rceil$ は A の切り上げである。

定理 4 (竹腰 [T]) X を連結な複素多様体 Y を被約で既約な複素空間, $f: X \rightarrow Y$ を 全射の射影的な射とする。 このとき すべて $i > \dim X - \dim Y$

に7112 $R^i f_* \omega_X = 0$ が成立する。

これらの定理を組み合わせて次の系を得る。

系 5 X を連結な複素多様体, Y, Z を被約で既約な複素空間とする。 $f: X \rightarrow Y$ を全射な射影的射とし, $g: Y \rightarrow Z$ を射影的射, 生成的に有限射とする。このとき すべての $j \geq 0$ に7112

$$R^i g_* (R^j f_* \omega_X) = \begin{cases} 0 & i > 0 \\ R^j (g \circ f)_* \omega_X & i = 0 \end{cases}$$

が成立する。

(証明). $\dim X = \dim Y$ に7112の帰納法で示す。

定理 2 と 定理 4 に7112, $\dim X = \dim Y$ の場合は OK である。

7112 $\dim X > \dim Y$ と仮定して7112。 Z に7112 local な問題があるので X 上には $g \circ f$ -ample なスームズな因子 H で すべての H の連結成分が f で Y に全射的に移るものが存在するに7112。 7112 H は f -ample である。 ここで 完全列

$$0 \rightarrow \omega_X \rightarrow \omega_X(H) \rightarrow \omega_H \rightarrow 0$$

を考えて, 定理 3 に7112,

$$(a) \quad 0 \rightarrow f_* \omega_X \rightarrow f_* \omega_X(H) \rightarrow f_* \omega_H \rightarrow R^1 f_* \omega_X \rightarrow 0$$

$$(b) \quad R^i f_* \omega_H \cong R^{i+1} f_* \omega_X \quad \text{for } i \geq 1$$

が成立する。定理2と(b)と、帰納法の仮定により

$$(*) \quad R^j g_* (R^1 f_* \omega_X) = 0 \quad \text{for } j > 0$$

を示せば十分である。

ここで $Q = f_* \omega_X(H) / f_* \omega_X$ とおく。(a)により

$$(c) \quad 0 \rightarrow f_* \omega_X \rightarrow f_* \omega_X(H) \rightarrow Q \rightarrow 0$$

$$(d) \quad 0 \rightarrow Q \rightarrow f_* \omega_H \rightarrow R^1 f_* \omega_X \rightarrow 0$$

を得る。従って定理2を用いれば(*)を得る。 q.e.d.

§2. 主定理及びその証明のスケッチ.

X を純次元の複素多様体, Y を連結な複素多様体

$f: X \rightarrow Y$ を射影的射であるとする。ここですべての連結成分は f により Y に全射的に移され、 Y 上の正規交叉のみをもつ因子 D が存在して f は $Y \setminus D$ 上

スムーズであると仮定する。ここで $\mathcal{H}_0^{d+i} = R^{d+i} f_* (\mathbb{Z})|_{Y \setminus D} \otimes \mathcal{O}_{Y \setminus D}$, $F^p(\mathcal{H}_0^{d+i})$ を p 番目のホッジフィルトレーションとする。

($d = \dim X - \dim Y$)。さらに \mathcal{H}_0^{d+i} の D のまわりのローカルモノドロミーはすべて単巾であると仮定する。これを

Schmid [S, nilpotent orbit theorem] により \mathcal{H}_0^{d+i} の canonical extension \mathcal{H}_Y^{d+i} は部分ベクトル束としてのフィルトレーションの

拡張;

$\mathcal{X}_Y^{d+i} = F^0(\mathcal{X}_Y^{d+i}) \supset F^1(\mathcal{X}_Y^{d+i}) \supset \dots \supset F^d(\mathcal{X}_Y^{d+i}) \supset f_0$
 をもつ。この章の目的は、次の定理のスケッチを与えることである。これは、J. Kollar [K02] 及び 中山 [Ny1] 局所解析的な拡張である。これは、本稿の主定理とでもいうべき定理である。

定理 6 上と同じ記号で、同型

$$\phi_i : R^i f_* \omega_{X/Y} \xrightarrow{\sim} F^d(\mathcal{X}_Y^{d+i})$$

がすべての $i \geq 0$ について成立する。ここで $\omega_{X/Y} = \omega_X \otimes f^*(\omega_Y^{-1})$ 。

Zucker [Z] により、定理 6 は、 $\dim Y = 1$ である正しいことが知られており、この事実を用いれば、定理 6 の状況で準同型 $\phi_i : R^i f_* \omega_{X/Y} \longrightarrow F^d(\mathcal{X}_Y^{d+i})$ がすべての $i \geq 0$ について存在し、これは余次元 1 で同型であることがわかる。さらに 川又 [Ka1] により、 ϕ_0 は同型であることが示されている。次の補題は、後の証明で有用となる。

補題 7 (川又 [Ka2]) $f: X \rightarrow Y$ を complex

manifold の間の射で C, D を X 及び Y 上の正規交叉のみをもつ因子で $f(X \setminus C) \subset Y \setminus D$ と仮定する。 \mathcal{X}_0 を

$Y \setminus D$ 上の V.H.S. (Variation of Hodge structure) とする。
 ここで \mathcal{H}_0 の D の周りの局所モノドロミーは、単中であると
 仮定する。 \mathcal{H} 及び $\mathcal{H}' \in \mathcal{H}$ 及び $(f|_{X \setminus C})^* \mathcal{H}$ の
 Canonical extension とすると フィルトレーションと compatible
 な同型 $f^* \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}'$ が存在する。

ここで 次の条件を考える。

条件(*) X を 純次元的な複素多様体, Y を 連結
 な複素多様体, $y \in Y$ の 点で $\pi: B \rightarrow Y$ と y
 での blowing-up で その例外因子を E とする。 $g: X \rightarrow B$
 を 射影的写射で, X のすべての連結成分は g で全射的
 に B に移るとする。 ここで $f = \pi \circ g$, $d = \dim X - \dim Y$
 とおく。

$$\begin{array}{ccc} & X \supset T & \\ f \swarrow & \downarrow g & \\ Y \xleftarrow{\pi} B & & \end{array}$$

- (i) Y 上には 正則交叉のみを成す因子 D が存在して,
 f は $Y \setminus D$ 上スムーズで $Y \not\subset D$ とする。
- (ii) X 上には スムーズな因子 T が存在して次を満たす。
 T のすべての連結成分は f で Y 上に全射的に移り,

$f|_T: T \rightarrow Y$ は $Y \setminus D$ 上 Σ -ス"であり, $\mathcal{O}_X(T)$ は 半正定値の直線束 かつ, $R^i f_* \omega_X(T) =$
^{田中の意味で}
 $R^i g_* \omega_X(T) = 0$ かつ $\forall i > 0$ について成立する。

(iii) $\mathcal{H}_0^{d+i} = R^{d+i} f_*(Z)|_{Y \setminus D} \otimes \mathcal{O}_{Y \setminus D}$
 $\mathcal{H}_0^{d-1+i} = R^{d-1+i} (f|_T)_*(Z)|_{Y \setminus D} \otimes \mathcal{O}_{Y \setminus D}$
 とおくとき, $\mathcal{H}_0^{d+i}, \mathcal{H}_0^{d-1+i}$ は D を除いた"単中の
 局所元 ρ により $\rho \neq 0$ とする。 $\mathcal{H}_Y^{d+i}, \mathcal{H}_Y^{d-1+i}$
 $\in \mathcal{H}_0^{d+i}, \mathcal{H}_0^{d-1+i}$ の canonical extension とし,
 $\{F^p(\mathcal{H}_Y^{d+i})\}, \{F^p(\mathcal{H}_Y^{d-1+i})\} \in$ Hodge filtration
 の表とす。

(iv) 同型 $R^i f_* \omega_X \simeq F^{d-1}(\mathcal{H}_Y^{d-1+i})$ 及び
 $R^i g_* \omega_{X/B} \simeq \pi^*(F^{d-1}(\mathcal{H}_Y^{d-1+i}))$ が存在する。

(v) 準同型 $\phi_i: R^i f_* \omega_{X/Y} \rightarrow F^d(\mathcal{H}_Y^{d+i})$ 及び
 $\phi'_i: R^i g_* \omega_{X/B} \rightarrow \pi^*(F^d(\mathcal{H}_Y^{d+i}))$ を考える時。
 $\text{Supp}(\text{Coker}(\phi_i)), \text{Supp}(\text{Ker}(\phi_i)) \subset \{y\}$ 及び
 $\text{Supp}(\text{Coker}(\phi'_i))$ と $\text{Supp}(\text{Ker}(\phi'_i))$ は E の
 有限部分集合とす。

さてここから補題を証明する。

補題 8 条件 (※) のもとで, ϕ_i と ϕ'_i は同型である。

(証明). $M^i = F^d(\mathcal{X}_Y^{d+i})$, $m^i = F^{d-1}(\mathcal{X}_Y^{d-1+i})$,
 $E(a) = \mathcal{O}_B(aE)$, $k = \dim Y$ とおく。完全列

$$0 \rightarrow \omega_X \rightarrow \omega_X(T) \rightarrow \omega_T \rightarrow 0$$

より, 条件 (※) の (ii) より

$$(a) \quad 0 \rightarrow f_* \omega_{X/Y} \rightarrow f_* \omega_{X/Y}(T) \rightarrow f_* \omega_{T/Y} \rightarrow R^1 f_* \omega_{X/Y} \rightarrow 0$$

$$(a') \quad 0 \rightarrow g_* \omega_{X/B} \rightarrow g_* \omega_{X/B}(T) \rightarrow g_* \omega_{T/B} \rightarrow R^1 g_* \omega_{X/B} \rightarrow 0$$

$$(b) \quad \delta_i: R^{i-1} f_* \omega_{T/Y} \cong R^i f_* \omega_{X/Y} \quad i \geq 2$$

$$(b') \quad \delta'_i: R^{i-1} g_* \omega_{T/B} \cong R^i g_* \omega_{X/B} \quad i \geq 2$$

Claim 1. $\phi_i: R^i f_* \omega_{X/Y} \rightarrow M^i$, $\phi'_i: R^i g_* \omega_{X/B} \rightarrow \pi^*(M^i)$
 は $i \neq 1$ のとき同型である。

ϕ_0, ϕ'_0 は同型であること $i \geq 2$ については (iv) と (b), (b') より $R^i f_* \omega_{X/Y}$ と $R^i g_* \omega_{X/B}$ は $i \geq 2$ のとき locally free である。よって ϕ_i と ϕ'_i は同型である。

ここで, 自然な準同型

$$h: R^1 g_* \omega_{X/B} \rightarrow R^1 f_* \omega_{X/Y}$$

を考える。この時,

Claim 2 $\pi_*(h): \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/B}) \rightarrow \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/Y})$
は、全射である。

$$R = (g_* \omega_{X/B}(T)) / (g_* \omega_{X/B}) \quad (* < 0 \quad \text{よって } (a') \text{ あり})$$

$$(c) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & R & \rightarrow & g_* \omega_{T/B} & \longrightarrow & R^1 g_* \omega_{X/B} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h \\ 0 & \rightarrow & R \otimes E(k-1) & \rightarrow & g_* \omega_{T/Y} & \longrightarrow & R^1 g_* \omega_{X/Y} \rightarrow 0 \end{array}$$

を得る。R の定義により。

$$0 \rightarrow g_* \omega_X \otimes \pi^*(\omega_Y^{-1}) \rightarrow g_* \omega_X(T) \otimes \pi^*(\omega_Y^{-1}) \rightarrow R \otimes E(k-1) \rightarrow 0$$

である。一方 定理 2 と 系 5 により

$$R^1 \pi_*(g_* \omega_X(T) \otimes \pi^*(\omega_Y^{-1})) = R^2 \pi_*(g_* \omega_X \otimes \pi^*(\omega_Y^{-1})) = 0$$

であるから $R^1 \pi_*(R \otimes E(k-1)) = 0$ を得る。

ところが 条件 (*) の (iv) により $g_* \omega_{T/B} \cong \pi^*(m^0)$ かつ

$g_* \omega_{T/Y} \cong \pi^*(m^0) \otimes E(k-1)$ であるから (c) の準像

を考えて

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \pi_*(R) & \longrightarrow & m^0 & \longrightarrow & \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/B}) \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \pi_*(h) \\ 0 & \rightarrow & \pi_*(R \otimes E(k-1)) & \longrightarrow & m^0 & \longrightarrow & \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/Y}) \rightarrow 0 \end{array}$$

を得る。よって $\pi_*(h)$ は全射。

claim 3 $\text{Ker}(\phi'_1) = 0$

まず次の図式を考へる。

$$(d) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \text{Ker}(\phi'_1) & \longrightarrow & R^1 g_* \omega_{X/B} & \longrightarrow & \pi^*(M^1) & \\ & \alpha \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \text{Ker}(\phi'_1) \otimes E(k-1) & \longrightarrow & R^1 g_* \omega_{X/Y} & \longrightarrow & \pi^*(M^1) \otimes E(k-1) & \end{array}$$

この準像をとって

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \pi_*(\text{Ker}(\phi'_1)) & \longrightarrow & \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/B}) & \longrightarrow & M^1 & \\ & \pi_*(\alpha) \downarrow & & \downarrow \pi_*(h) & & \parallel & \\ 0 \longrightarrow & \pi_*(\text{Ker}(\phi'_1) \otimes E(k-1)) & \longrightarrow & \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/Y}) & \longrightarrow & M^1 & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

よって、 $\pi_*(\alpha)$ は全射となり、 $\text{Supp}(\text{Ker}(\phi'_1))$ は E の有限部分集合ゆえ、NAKにより $\text{Ker} \phi'_1 = 0$

claim 4 $\text{Coker}(\phi'_1) = 0$

$$R^1 \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/Y}) = 0 \quad \text{''は 3 a 2''}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & R^1 g_* \omega_{X/B} & \longrightarrow & \pi^*(M^1) & \longrightarrow & \text{Coker}(\phi'_1) & \longrightarrow 0 \\ & h \downarrow & & \downarrow & & \beta \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & R^1 g_* \omega_{X/Y} & \longrightarrow & \pi^*(M^1) \otimes E(k-1) & \longrightarrow & \text{Coker}(\phi'_1) \otimes E(k-1) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

の準像をとる

$$\begin{array}{ccccc}
 0 \rightarrow \pi_*(R^1 j_* \omega_{X/B}) & \rightarrow & M' & \rightarrow & \pi_*(\text{Coker}(\phi'_1)) \\
 \pi_* h \downarrow & & \parallel & & \pi_* \beta \downarrow \\
 0 \rightarrow \pi_*(R^1 j_* \omega_{X/Y}) & \rightarrow & M' & \rightarrow & \pi_*(\text{Coker}(\phi'_1) \otimes E(h)) \rightarrow 0
 \end{array}$$

よって $\pi_* \beta$ は全射であるから NAK により $\text{Coker} \phi'_1 = 0$

claim 3 と claim 4 により 容易に $\ker(\phi_1) = \text{Coker}(\phi_1) = 0$
 がわかる。q. e. d.

この補題により, 問題は適当な因子 T を見つける
 こととなる。このためには, 埋め込み $j: X \rightarrow Y \times \mathbb{P}^N$
 が存在するとしてよい。 \mathbb{P}^N の一般の hyperplane T' は
 X 上にスムーズな因子 T を定義するが, ここには, 2つ
 の技術的な obstruction が存在する。1番目は,
 $f|_T$ の branch locus $\{y \in Y \mid f|_T \text{ は } y \text{ 上 smooth でない}\}$
 が 正規交叉する因子に含めらる限りぬ ことである。
 2番目は, $f|_T$ がよい branch locus をもたなくても,
 $f|_T$ の local monodromy が unipotent とはならぬこと
 である。これらの obstruction は, 適当な方法で解消すること
 ができるが, 本稿では, 省略する。以上が定理6の

証明のステップ 4 である。

§3 Upper canonical extension と Lower canonical extension

定理 6 で モノドロミーの仮定をはずすため V.H.S. の Upper canonical extension と lower canonical extension の概念を Kollár [Ka2] に 従って 導入する。 Y を 連結な 複素多様体で, $D \subset Y$ 上の 正規交叉のみをもつ 因子とする。 $U \subset Y \setminus D$ とし, $\mathcal{H} \subset U$ 上の V.H.S. とする。 まず, local に \mathcal{H} の upper canonical extension ${}^u\mathcal{H}$, lower canonical extension ${}^l\mathcal{H}$ を 定義する。 $Y = \Delta^k$, $U = (\Delta^*)^e \times \Delta^{k-e}$ とおく。 $\{V_1, \dots, V_n\} \subset \mathcal{H}$ の multi-valued flat basis とする。 B_j ($j=1, \dots, e$) $\in D$ の 周りの local monodromies とする。 つまり, $C_j \in z_j$ -軸の 周りの 反時計方向に 回りあ作用すると $V_i(C_j z) = B_j V_i(z)$ である。 ここで B_j は quasi-unipotent であるので, 固有値の絶対値はすべて 1 である。 したがって, ${}^u\log B_j$ \in 固有値が $\sqrt{-1}[0, 2\pi)$ とするよう定め, ${}^l\log B_j$ \in 固有値が $\sqrt{-1}(-2\pi, 0]$ とするよう定める。 そこで ${}^uV_i = \exp\left(-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^e {}^u\log B_j \log z_j\right) V_i$, ${}^lV_i = \exp\left(-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^e {}^l\log B_j \log z_j\right) V_i$ と定め, ${}^u\mathcal{H}$, ${}^l\mathcal{H}$ は

それぞれ, $\{^u v_1, \dots, ^u v_n\}$, $\{^l v_1, \dots, ^l v_n\}$ で生成される free sheaf とする。 $^u \mathcal{H}$, $^l \mathcal{H}$ は 軸 z_j や basis $\{v_i\}$ のとり方に依るが global に定義される。

$\{F^p\}$ が \mathcal{H} の filtration とする時 $^u \mathcal{H}$, $^l \mathcal{H}$ の filtration を次で定める。

$$F^p(^u \mathcal{H}) = ^u \mathcal{H} \cap j_* (F^p(\mathcal{H}))$$

$$F^p(^l \mathcal{H}) = ^l \mathcal{H} \cap j_* (F^p(\mathcal{H}))$$

ここで $j: U \rightarrow X$ は inclusion map である。

さらに, filtration $\{F^p\}$ を与えた Y 上の coherent sheaf A に対して A の dual $A^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(A, \mathcal{O}_Y)$ の filtration は次で定める。

$$F^p(A^\vee) = (A / F^{1-p}(A))^\vee.$$

この時, 次の命題が成立する。

命題 9

- (i) $F^p(^u \mathcal{H})$, $F^p(^l \mathcal{H})$ は $^u \mathcal{H}$ と $^l \mathcal{H}$ の 部分ベクトル束である。
- (ii) filtration と compatible な 同型 $(^u \mathcal{H})^\vee \simeq ^l(\mathcal{H}^\vee)$
 $(^l \mathcal{H})^\vee \simeq ^u(\mathcal{H}^\vee).$

次に 幾何学的な場合を考える。 $f: X \rightarrow Y$ を 連結な複素多様体の間の射影的な surjective な morphism

とする。 $D \in Y$ 上の正則交叉の素因子で f は $Y \setminus D$ 上 smooth とする。 ここで

$$\mathcal{H}^j = R^j f_* (\mathbb{Z})|_{Y \setminus D} \otimes \omega_{Y \setminus D}$$

と置く。 この時 Serre duality により $(\mathcal{H}^{d-i})^\vee \otimes T(-d)$

と \mathcal{H}^{d+i} は filtration F に関して同型である。 ここで

$d = \dim X - \dim Y$, $T(1)$ は Tate の Hodge 構造である。

$L \in X$ 上の f -ample な line bundle とする。

$$P^j = \begin{cases} \ker(\wedge L^{d-j+1} : \mathcal{H}^j \rightarrow \mathcal{H}^{2d-j+2}) & j \leq d \\ 0 & j > d \end{cases}$$

$$Q^j = (P^{2d-j})^\vee \otimes T(-d)$$

と置く。 この時、次の定理が成立する。

定理 10 上と同じ状況で 次の同型が存在する。

$$R^i f_* \omega_{X/Y} \simeq F^d({}^u \mathcal{H}^{d+i}) \simeq F^d({}^u Q^{d+i})$$

$$R^i f_* \omega_X \simeq \mathrm{Gr}_F^0({}^l \mathcal{H}^i) \simeq \mathrm{Gr}_F^0({}^l P^i)$$

(証明) L による multiplication は type $(1, 1)$ の Hodge morphism であるので、明らかに $\mathrm{Gr}_F^0({}^l P^i) \simeq \mathrm{Gr}_F^0({}^l \mathcal{H}^i)$ である。 一方 命題 9 により $({}^l \mathcal{H}^{d-i})^\vee \otimes T(-d) \simeq {}^u \mathcal{H}^{d+i}$

に注意すると

$$\begin{aligned}
 F^d({}^u Q^{d+i}) &\simeq F^0({}^u((p^{d-i})^\vee)) \\
 &\simeq F^0({}^{\ell} p^{d-i})^\vee \\
 &\simeq \mathrm{Gr}_F^0({}^{\ell} p^{d-i})^\vee \\
 &\simeq \mathrm{Gr}_F^0({}^{\ell} \mathcal{H}^{d-i})^\vee \\
 &= F^d({}^{\ell} \mathcal{H}^{d-i})^\vee \otimes T(-d) \\
 &\simeq F^d({}^u \mathcal{H}^{d+i})
 \end{aligned}$$

また $R^i f_* \omega_{X/Y} \simeq F^d({}^u \mathcal{H}^{d+i})$ が成り立つとその dual をとり $R^i f_* \mathcal{O}_X$ に関する同型が得る。よって同型 $R^i f_* \omega_{X/Y} \simeq F^d({}^u \mathcal{H}^{d+i})$ を言えば十分である。

ここで $f^*(D)_{\mathrm{red}}$ は、正規交叉のみをもつと仮定しよう。また local に同型が存在することを示す。そこで $Y = \Delta_{\mathbb{A}^k}^k = \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{A}^k \mid |z_i| < 1\}$ とおく。さらに $D = \{(z_1, \dots, z_k) \mid z_1 \cdots z_k = 0\}$ とおく。このとき e の正の整数 m_1, \dots, m_k が存在して

covering $\pi: \Delta_W^k \longrightarrow \Delta_{\mathbb{A}^k}^k$ を $\pi(w_1, \dots, w_k) = (w_1^{m_1}, \dots, w_k^{m_k}, w_1^{m_1} w_2^{m_2}, \dots, w_k^{m_k})$

と定めると $\pi^* \mathcal{H}^{d+i}$ は local monodromy は単中であるように

とできる。 X_1 は $X \times_{\Delta_{\mathbb{A}^k}^k} \Delta_W^k$ の Main connected component の normalization とし、 X' はその desingularization とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{\pi_1} & X_1 & \xleftarrow{d} & X' \\
 f \downarrow & & f_1 \downarrow & & \downarrow f' \\
 \Delta_{\mathbb{A}^k}^k & \xleftarrow{\pi} & \Delta_W^k & = & \Delta_W^k
 \end{array}$$

$\pi' = \pi \circ d$ とすると. $\pi'_* \omega_{X'}$ の direct summand として ω_X があることが容易に確かめられる. したがって $\pi'_*(R^i f'_* \omega_{X'})$ の direct summand として $R^i f_* \omega_X$ がある. また direct 計算により

$$u^* \mathcal{H}^{d+i} \otimes \omega_{\Delta^k} = \pi'_* (u^* (\pi^* \mathcal{H}^{d+i}) \otimes \omega_{\Delta^k})^G$$

ここで G は π の covering group. である. また定理 6 より

$$\pi'_*(R^i f'_* \omega_{X'}) \simeq \pi'_*(F^d(u^* (\pi^* \mathcal{H}^{d+i})) \otimes \omega_{\Delta^k})$$

であるので, 二者は同型 $R^i f_* \omega_{X/Y} \simeq F^d(u^* \mathcal{H}^{d+i})$

を得る. 次に global な場合は, $j: Y \setminus D \rightarrow Y$ は

inclusion map とする. $G^i := j_* j^*(R^i f_* \omega_{X/Y}) \simeq j_* j^*(F^d(u^* \mathcal{H}^{d+i}))$ とおく. すると $F^i \in R^i f_* \omega_{X/Y}$ と $F^d(u^* \mathcal{H}^{d+i})$ で生成される coherent sheaf とする.

$$R^i f_* \omega_{X/Y} \rightarrow F^i \quad \text{と} \quad F^d(u^* \mathcal{H}^{d+i}) \rightarrow F^i$$

の 2 つの準同型が得られるが, 二者は local な議論により同型である. q. e. d.

注意 P^0 と \mathcal{O}^0 は 自然 (= polarization) として “ n ”, “ 1 ” また [1, 2, Theorem 2] により, f が単中の n 元ノードを有する D が simple normal crossing n 元ノードを有するならば, $R^i f_* \omega_{X/Y}$ は semi-positive “

$R^i f_* \mathcal{O}_X$ は semi-negative である。 \therefore \mathcal{O}_Y 上の vector bundle F が semi-positive (resp. semi-negative) ならば、任意の compact curve C と 任意の morphism $\varphi: C \rightarrow Y$ と、 $\varphi^* F$ の 任意の quotient linebundle E (resp. sub-line bundle G) に対して $\deg_C(E) \geq 0$ (resp. $\deg_C G \leq 0$) が成り立つ。

§4. 定理 1 の証明.

定理 1 の証明する。 X を 連結である と 仮定 しよう。
 ここで 次の 図式 を 構成 する。

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\mu'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{\mu} & Y' \end{array}$$

- (1) X' と Y' は 連結な 複素多様体。
- (2) $\mu, \mu' \in$ projective 上の bimeromorphic な morphism である。
- (3) f' は surjective である projective morphism である。
- (4) Y' 上 に 正規交叉のみをもつ 因子 D' が存在して f' は $Y' \setminus D'$ 上 smooth である。

$$\therefore \text{よって } R^0 \mu'_* \omega_{X'} = \omega_X \text{ である。}$$

$$R^i (\mu \circ f')_* \omega_{X'} = R^i (f \circ \mu')_* \omega_{X'}$$

$$= R^i f_* \omega_X$$

一方 系5に より

$$R^i(\mu \circ f')_* \omega_{X'} = \mu_* (R^i f'_* \omega_{X'})$$

である。

$$R^i f_* \omega_X = \mu_* (R^i f'_* \omega_{X'})$$

ここで 定理10により $R^i f'_* \omega_{X'}$ は *locally free* である。よって $R^i f_* \omega_X$ は *torsion free* である。

X と Y を 複素空間 とし、 $f: X \rightarrow Y$ を 固有写像 とする。 f が Moishezon morphism とは、 Y の 各点 y に対して y の 近傍 U と compact Moishezon space V が存在して、 内埋入 $j: f^{-1}(U) \hookrightarrow U \times V$ があって $p \circ j = f$ を満たすときをいう。 ここで p は 自然な projection $p: U \times V \rightarrow U$ である。 このとき、 定理1は 容易な議論で 次のように 拡張される。

定理11 X を 複素多様体、 Y を 被約で既約な複素空間、 $f: X \rightarrow Y$ を Moishezon morphism とする。 ここで X の すべての連結成分は f に Y に surjective に 移ると仮定する。 このとき $R^i f_* \omega_X$ は *torsion free* である。

Reference

- [Ka 1] Kawamata, Y. : Kodaira dimension of algebraic fibre space over curves, Invent. Math. 66, (1982), 57-71.
- [Ka 2] Kawamata, Y. : Kodaira dimension of certain algebraic spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, IA-30, (1983), 1-24.
- [Ko 1] Kollár, J. : Higher direct images of dualizing sheaves, preprint, (1984).
- [Ko 2] Kollár, J. : Higher direct images of dualizing sheaves II, preprint (1985).
- [Nm] Nakamura, I. : On classification of parallelisable manifolds and small deformations, J. Diff. Geometry, 10, (1975), 85-112.
- [Ny 1] Nakayama, N. : Hodge filtrations and higher direct images of canonical sheaves, preprint, (1985).
- [Ny 2] Nakayama, N. : On the lower semi-continuity of the plurigena, preprint, (1985).

- [O] Ohsawa, T. : Vanishing theorems on complete Kähler manifolds, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 20 (1984), 21-38
- [S] Schmid, W. : Variation of Hodge structure, Invent. Math. 22, (1973), 211-319.
- [T] Takegoshi, K. : Relative vanishing theorems in analytic spaces, Duke Math. J. 52, (1985), 273-279.
- [U] Ueno, K. : On three-dimensional compact complex manifolds with non-negative Kodaira dimension, Proc. Japan Acad., 56, Ser. A, (1980), 479-483.
- [Z] Zucker, S : Degeneration of Hodge bundles, in Topics in transcendental algebraic geometry, Ann. of Math. Studies 106, Princeton Univ. Press, (1984), 121-141.
- [MW] Moriwaki, A : Torsion freeness of higher direct images of canonical bundles, Preprint (1985)